Serie 9

1. Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Für die Verteilung von (X, Y) sollen folgende Bedingungen gelten:

$$P[X = 0] = 1/2, \;\; P[Y = 0] = 1/3 \text{ und } P[X = 0, Y = 0] = p.$$

a) Welche Werte darf p annehmen und für welche Werte von p sind X und Y unabhängig?

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $E[X]$, $E[Y]$ und $E[XY]$ sowie die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 als Funktion von p. Wann gilt $E[XY] = E[X]E[Y]$?

c) Finden Sie ein Beispiel von Zufallsvariablen U und V so, dass $E[UV] = E[U]E[V]$ aber mit U und V nicht unabhängig.

2. **a)** Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{n}{j}$, wobei $m, n, k \geq 1$.

HINWEIS: Benützen Sie die Identität $(1 + x)^{m+n} = (1 + x)^m(1 + x)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Seien X und Y zwei binomial verteilte Zufallsvariablen mit Parametern (m, p) bzw. (n, p).

b) Angenommen X und Y sind unabhängig, was ist die Verteilung von $X + Y$?

Wir betrachten eine Urne mit 5 schwarzen und 5 weissen Kugeln. Wir ziehen $n \geq 1$ Kugeln mit Zurücklegen. Sei X' die Anzahl weisser Kugeln, welche gezogen wurden, und sei Y' die Anzahl schwarzer Kugeln, welche gezogen wurden.

c) Was sind die Verteilungen von X', Y' und $X' + Y'$? Widerspricht dies dem Resultat aus **b)**?

3. Ein Fabrikant verwendet Komponenten A, B, C um Chips herzustellen. Ein Chip wird aus einer Komponente A und einer Komponente B oder aus einer Komponente A und einer Komponente C hergestellt. Beide Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich. Die Komponenten A, B, C haben respektiv X, Y, Z Fehlerstellen. Wir nehmen an, dass X, Y, Z unabhängig und Poisson verteilt sind mit respektiven Parametern λ, μ und 2μ. Sei N die Anzahl Fehlerstellen in einem Chip.

a) Berechnen Sie explizit die Verteilungen von $X + Y$ und $X + Z$.

Bitte wenden!

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip die Komponente B enthält, falls $N = n$, für $n \geq 0$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von N.